[ΘΕΜΑΤΑ Α.Λ.Ι]

1. Έστω $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω $f(\alpha) = 1 = f(b)$, $\exists f'' \ \forall x \in (\alpha, b)$ με $f''(x) \neq 0 \ \forall x \in (\alpha, b)$. Να δειχθεί ότι $f(x) \neq 1 \ \forall x \in (\alpha, b)$. Στη συνέχεια δείξτε ότι είτε $f(x) > 1 \ \forall x \in (\alpha, b)$ ή $f(x) < 1 \ \forall x \in (\alpha, b)$.

// Έστω ότι $\exists \ x_0 \in (\alpha, b)$ τ.ω $f(x_0) = 1$

f συνεχής στο $[\alpha, x_0] \subset [\alpha, b]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha, x_0) \subset (\alpha, b)$, $f(\alpha) = f(x_0)$, οπότε από Θ. Rolle $\exists \ \xi_1 \in (\alpha, x_0)$ τ.ω $f'(\xi_1) = 0$

f συνεχής στο $[x_0, b] \subset [\alpha, b]$, παραγωγίσιμη στο $(x_0, b) \subset (\alpha, b)$, $f(x_0) = f(b)$, οπότε από Θ. Rolle $\exists \ \xi_2 \in (x_0, b)$ τ.ω $f'(\xi_2) = 0$

f' παραγωγίσιμη στο $[\xi_1, \xi_2] \subset (\alpha, b)$, $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, οπότε από Θ. Rolle $\exists \ \xi_3 \in (\xi_1, \xi_2) \subset (\alpha, b)$ τ.ω $f''(\xi_3) = 0$, άτοπο λόγω υπόθεσης. Άρα $f(x) \neq 1 \ \forall x \in (\alpha, b)$

Ας είναι $g(x) = f(x) - 1 \neq 0 \ \forall x \in (\alpha, b)$, κι έστω ότι η g δε διατηρεί πρόσημο στο (α, b). Τότε $\exists \ x_1 \in (\alpha, b)$ τ.ω $g(x_1) > 0$, $\exists \ x_2 \in (\alpha, b)$ τ.ω $g(x_2) < 0$. Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2] \subset (\alpha, b)$ όπου g συνεχής ως διαφορά συνεχών. Από το Θ. Bolzano $\exists \ x_3 \in (x_1, x_2) \subset (\alpha, b)$ τ.ω $g(x_3) = 0 \Leftrightarrow f(x_3) = 1$, άτοπο μιας και $f(x) \neq 1 \ \forall x \in (\alpha, b)$. Άρα η g διατηρεί πρόσημο στο (α, b), κι αφού $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (\alpha, b)$, έπεται ότι $g(x) > 0 \ \forall x \in (\alpha, b)$ ή $g(x) < 0 \ \forall x \in (\alpha, b) \Leftrightarrow f(x) > 1 \ \forall x \in (\alpha, b)$ ή $f(x) < 1 \ \forall x \in (\alpha, b)$.

2. (A) Αποδείξτε ότι $\frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e}$ $\forall\, x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=e$. Στη συνέχεια συγκρίνετε τους e^{π} και π^{e}.

(B) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $f(x)=g(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{Q}$. Να δειχθεί ότι $f(x)=g(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

// (A) Ας είναι $\ell(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x>0$, παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων, με $\ell'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $x>0$. Είναι:

$\ell'(x) \ge 0 \iff 1-\ln x \ge 0 \iff x \le e$, οπότε έχω ότι ℓ γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και ℓ γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$, οπότε η h έχει ~~μ~~ μέγιστο στη θέση $x=e$, το $h(e)$, δηλαδή $h(x) \le h(e) = \frac{1}{e}$ $\forall\, x>0 \iff \frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e}$ $\forall\, x>0$.

Για $x=\pi \ne e$ έχω $\frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{1}{e} \iff e\ln\pi < \pi \iff$
$\ln \pi^{e} < \ln e^{\pi} \underset{x>0}{\overset{\ln x \nearrow}{\iff}} \pi^{e} < e^{\pi}$

(B) Αρκεί να δείξω ότι $f(x)=g(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Από την πυκνότητα των αρρήτων στους ρητούς, $\exists\, x_\nu \subset \mathbb{Q}$ τ.ω. $x_\nu \to x_0$, κι αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχω ότι $f(x_\nu) \to f(x_0)$. Επίσης αφού g συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχω ότι $g(x_\nu) \to g(x_0)$. Αφού $x_\nu \subset \mathbb{Q}$ έχω ότι $f(x_\nu) = g(x_\nu)$, οπότε έπεται από τη μοναδικότητα ορίου ακολουθίας ότι $f(x_0) = g(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, κι αφού x_0 τυχούσο, τελικά έχω ότι $f(x) = g(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

3. (A) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|\sin x$ είναι παραγωγίσιμη και να βρεθεί η f'. Στη συνέχεια να εξετασθεί ως προς την παραγωγισιμότητα η f'.

(B) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2\cos\left(\frac{2}{x}\right)$, $x \neq 0$, με $f(0) = 0$. Να δειχθεί ότι η f είναι παντού παραγωγίσιμη και ότι η f' δεν είναι συνεχής στο 0.

// (A) Είναι $|x| = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f(x) = \sqrt{x^2}\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}\sin x + \cos x\sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$, επίσης παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}^*$.

(B) Για $x \neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων. Έχω ότι $\lim\limits_{x \to 0^{+,-}} \frac{x^{\cancel{2}}\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0^{+,-}} x\cos\left(\frac{2}{x}\right)$

Είναι:

$$0 \leq \left|x\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| \leq |x| \cdot 1 = |x| \xrightarrow{x \to 0^{+,-}} 0,$$

οπότε από θεώρημα παρεμβολής $\lim\limits_{x \to 0^{+,-}} \left|x\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to 0^{+,-}} x\cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0 \in \mathbb{R}$, $= f'(0)$, δηλαδή f παραγωγίσιμη στο 0. Έτσι f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{2}{x}\right) + 2\sin\left(\frac{2}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

, με

$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0 + \lim\limits_{x \to 0^+} 2\sin\left(\frac{2}{x}\right)$. Ας είναι $x_\nu = \frac{1}{\nu\pi}$ και

$y_\nu = \dfrac{1}{\frac{\pi}{4} + \pi\nu}$, με $x_\nu, y_\nu \to 0^+$ και $\sin\left(\frac{2}{x_\nu}\right) = \sin\left(\frac{2}{\frac{1}{\nu\pi}}\right)$

$= \sin(\underbrace{2\nu\pi}_{\text{άρτιος } \forall \nu}) = 0 \to 0$ και $\sin\left(\frac{2}{y_\nu}\right) = \sin\left(\frac{2}{\frac{1}{\frac{\pi}{4}+\pi\nu}}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\nu\right) = \sin(\pi\underbrace{(4\nu+1)}_{\text{περιττός } \forall \nu}/2) \neq 0 \not\to 0$, άρα το

$\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{2}{x}\right)$ δεν υπάρχει και συνεπώς ούτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$

υπάρχει και συνεπώς ούτε το $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ υπάρχει, κι έτσι η f'

δεν είναι συνεχής στο 0.

4. Έστω $f : [\alpha, \gamma] \to \mathbb{R}$ τ.ω $\exists$ η f'', $\exists\ \beta \in (\alpha,\gamma)$ τ.ω

$(f(\gamma) - f(\beta))(\beta - \alpha) = (f(\beta) - f(\alpha))(\gamma - \beta)$. Να δειχθεί ότι

$\exists\ \xi \in (\alpha, \gamma)$ τ.ω $f''(\xi) = 0$.

// $(f(\gamma) - f(\beta))(\beta-\alpha) = (f(\beta) - f(\alpha))(\gamma-\beta) \iff \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$ (1)

f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta] \subset [\alpha,\gamma]$, οπότε από Θ.Μ.Τ

$\exists\ \xi_1 \in (\alpha,\beta)$ τ.ω $f'(\xi_1) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (2)

f παραγωγίσιμη στο $[\beta,\gamma] \subset [\alpha,\gamma]$, οπότε από Θ.Μ.Τ

$\exists\ \xi_2 \in (\beta,\gamma)$ τ.ω $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$ (3)

Από (1),(2),(3) $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

f' παραγωγίσιμη στο $[\xi_1, \xi_2] \subset [\alpha,\gamma]$, $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, οπότε

από Θ. Rolle $\exists\ \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (\alpha,\gamma)$ τ.ω $f''(\xi) = 0$.

5. (α) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Να δειχθεί ότι η f είναι φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$, καθώς κι ότι $\exists\, x_0\in[\alpha,\beta]$ τ.ω $f(x_0)\geq f(x)\ \forall\, x\in[\alpha,\beta]$.

(β) Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς, με $\max\{f(x),x\in[\alpha,\beta]\} = \max\{g(x),x\in[\alpha,\beta]\}$. Να δειχθεί ότι $\exists\,\xi\in[\alpha,\beta]$ τ.ω $f(\xi)=g(\xi)$

(α)
// Η f ως συνεχής σε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, είναι φραγμένη σ'αυτό και μάλιστα παίρνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της σ'αυτό. Οπότε $\exists\, x_0\in[\alpha,\beta]$ με $f(x_0)$ μέγιστο της f, δηλαδή $f(x_0)\geq f(x)\ \forall\, x\in[\alpha,\beta]$.

(β) Έστω ότι $\forall\, x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x)\neq g(x)$

Ας είναι $h(x)=f(x)-g(x)\neq 0$, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως διαφορά συνεχών στο $[\alpha,\beta]$, οπότε η h διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, δηλαδή είναι $h(x)>0\ \forall\, x\in[\alpha,\beta]$ ή $h(x)<0\ \forall\, x\in[\alpha,\beta] \Longleftrightarrow$

$f(x)>g(x)\ \forall\, x\in[\alpha,\beta]$ ή $f(x)<g(x)\ \forall\, x\in[\alpha,\beta] \Longrightarrow$

$\max\{f(x),x\in[\alpha,\beta]\} > \max\{g(x),x\in[\alpha,\beta]\}$ ή $\max\{f(x),x\in[\alpha,\beta]\} < \max\{g(x),x\in[\alpha,\beta]\}$, δηλαδή σε κάθε περίπτωση $\max\{f(x),x\in[\alpha,\beta]\} \neq \max\{g(x),x\in[\alpha,\beta]\}$, πράγμα άτοπο εξ' υποθέσεως.

Άρα $\exists\,\xi\in[\alpha,\beta]$ τ.ω $f(\xi)=g(\xi)$.

6. Έστω $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω. $e^{4x} = 1 + f(x)\sin x \ \forall x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

Να υπολογισθεί το $f(0)$ και να δειχθεί ότι f παραγωγίσιμη, υπολογίζοντας την παράγωγό της σε κάθε σημείο του $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

// Για $x \neq 0$: $f(x) = \dfrac{e^{4x}-1}{\sin x}$. Αφού f συνεχής στο $0 \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{\sin x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{4e^{4x}}{\cos x} = 4.$$

Έτσι είναι, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{4x}-1}{\sin x}, & x \in (-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}) \\ 4, & x = 0. \end{cases}$

Για $x \in (-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$ f παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων, με $f'(x) = \dfrac{4e^{4x}\sin x - \cos x(e^{4x}-1)}{\sin^2 x}$, οπότε μένει να εξετάσω την παραγωγισιμότητα στο 0. Είναι $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-1-4\sin x}{x\sin x}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{4e^{4x}-4\cos x}{\sin x + x\cos x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{16e^{4x}+4\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{16}{2} = 8 \in \mathbb{R}$$

$= f'(0)$, άρα f παραγωγίσιμη στο $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ με

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4e^{4x}\sin x - \cos x(e^{4x}-1)}{\sin^2 x}, & x \in (-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}) \\ 8, & x = 0. \end{cases}$$

7. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, ισχύει $f(0)=0$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με τη συνάρτηση f' να είναι γνησίως αύξουσα. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα.

// f συνεχής στο $[0,x]\subset[0,+\infty)$, παραγωγίσιμη στο $(0,x)\subset(0,+\infty)$, οπότε από το Θ.Μ.Τ έχω ότι $\exists\ \xi\in(0,x)$ τ.ω $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{f(x)}{x}$

Είναι $0<\xi<x \xRightarrow[x>0]{f'\nearrow} f'(\xi)<f'(x) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}<f'(x) \Rightarrow xf'(x)-f(x)>0$ (*)

g παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων στο $(0,+\infty)$, με

$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\overset{(*)}{>}0\quad\forall\, x>0 \Rightarrow g$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

8. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{Q}$ συνεχής. Να δειχθεί ότι f σταθερή.

// Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε για κάποια $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ έχω ότι $f(x_1)\neq f(x_2)$. Ας είναι $f(x_1)<f(x_2)$, με $f(x_1),f(x_2)\in\mathbb{Q}$. Η f ως συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, από το Θ.Ε.Τ θα πρέπει να παίρνει κάθε τιμή στο $[f(x_1),f(x_2)]$ ή ισοδύναμα κάθε τιμή στο $[f(x_1),f(x_2)]$ να είναι ρητή. Όμως το $[f(x_1),f(x_2)]$ είναι διάστημα ρητών, και λόγω της πυκνότητας των αρρήτων στους ρητούς, περιέχει μέσα του άρρητο, έστω στη θέση x_3 με $f(x_3)\notin\mathbb{Q}$, πράγμα άτοπο σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. Έτσι έχω ότι $\forall\ x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$, δηλαδή f σταθερή στο $[\alpha,\beta]$.

9. Έστω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τ.ω $g(0) = g'(0) = 0$ και $g''(0) = 18$.
Ας είναι $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Να βρεθεί το $f'(0)$, χρησιμοποιώντας τον Κανόνα D' Hospital μόνο μια φορά.

// Είναι $18 = g''(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g'(x) - g'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g'(x)}{x}$ $(*)$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{D.H}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g'(x)}{2x}$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g'(x)}{x} \overset{(*)}{=} \dfrac{1}{2} \cdot 18 = 9 \in \mathbb{R} = f'(0)$